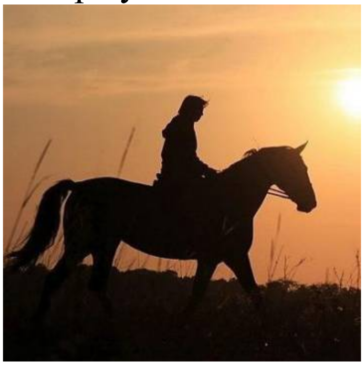
Читатель, готовящийся к экзамену по теормеху, неизбежно натыкается на вопросы «уравнение баланса энергии» и «уравнение баланса импульса». Вывод их занимает в Кузьменкове примерно 4 страницы интегралов. Что же это такое? Методичка по большому счёту необязательная к прочтению, но любознательным рекомендуется. Поговорим о классической теории поля.

Дело в том, что Лагранжев формализм, применённый к материальной точке – это всё детский сад. Там он не может показать себя. Другое дело, когда он применён к системам с бесконечном числом степеней свободы.
Нам часто приходится иметь дело с системами с бесконечным числом свободы. И это не обязательно что-то сверхсложное. Например, капля воды, вытекающего из под крана в ванной. Мы задались целью полностью просчитать движение капли, учитывая её изменение формы (да, нам делать нечего, а все серии «Смешариков» мы уже пересмотрели). Конечно, мы можем сказать, что в капле конечное число молекул, а у каждой конечное число степеней свободы. Но, давайте признаемся, мы не умеем решать задачи с 10^{24*3} степенями свободы.

Раньше у нас было время, теперь у нас есть дела… Кхм. Раньше у нас была частица, чья жизнь однозначно описывается отчётом **r**(t), по которой мы можем восстановить L[закон движения]. Обратите внимание на квадратные скобки: L может зависеть не только от **r**(t), но и от его производных.

Теперь у нас есть поле φ(r, t). Вы видите слово «поле»?



В известной песне человек выходил в поле с конём, а мы же сейчас выходим в классическую теорию поля. Сокращённо – КлаТП. Ни в коем случае не КТП, это Квантовая теория поля, у нас пока нос не дорос до неё.

Вместо функции Лагранжа L у нас будет плотность функции Лагранжа. Теоретики её традиционно обозначают прописной L. Я её буду обозначать буквой «Λ».

Как получить выражение для Λ? Ранее у нас было L=T-U, частица массой m в потенциале $W_п(\mathbf{r})$ с ф-цией Лангранжа $W_п(\mathbf{r})-mv^2/2$. Коли у нас теперь Λ, то теперь нам нужна плотность потенциальность и плотность кинетической энергии.

Мысленно разбиваем нашу каплю на маленькие кусочки массой d^3V.

Чему равна функция Лагранжа такого кусочка? С кинетической энергией всё просто - $d^3m*v^2/2$, или, чтобы выразить через объём - $d^3V * \rho(\mathbf{r}) * v^2/2$

С потенциальной чуть посложнее. Как правило, потенциальная энергия прямо пропорциональна объёму.
Так что обозначим $W_п(\mathbf{r})$ = Ц($\mathbf{r}$) * V, где Ц($\mathbf{r}$) – некая функция, зависящая от того, какой именно у нас потенциал. Если он mgz, то Ц – это $\rho(\mathbf{r})gz$. Если это $e\varphi$, то Ц = $e\varphi(\mathbf{r})/V=\rho_e(\mathbf{r})V\varphi(\mathbf{r})/V= \rho_e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})$, где ρ_e – объёмная плотность заряда.
Тогда функция Лагранжа от кусочка капли будет d^3V * (Ц($\mathbf{r}$) – $\rho(\mathbf{r}) * v^2/2$)).
Этот кусочек со своей функцией Лангража, двигаясь, породит действие… стоп, а помните ли вы, что такое действие? Это было в 4.2. Давайте напомню:

Начнём с простейшего нетривиального примера: движения вертикально брошенного в небо камня. Рассмотрим все возможные траектории $z(t)$, такие что в начальный момент времени t_0 камень находится на высоте z_0, а в некоторый более поздний момент времени $t_1 > t_0$ его высота равна z_1. Значения $t_{0,1}$ и $z_{0,1}$ будем предполагать фиксированными.

Вычислим интеграл *действия*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt(T - U) = \int_{t_0}^{t_1} dt\left[\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz\right], \tag{7.1}$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергии. Утверждение (*принцип наименьшего действия*) состоит в том, что для истинной

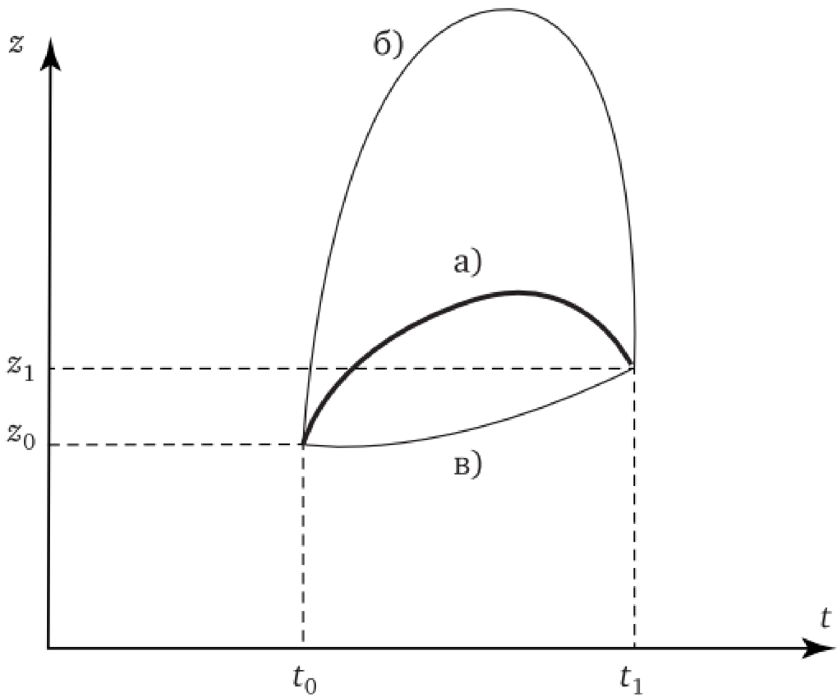


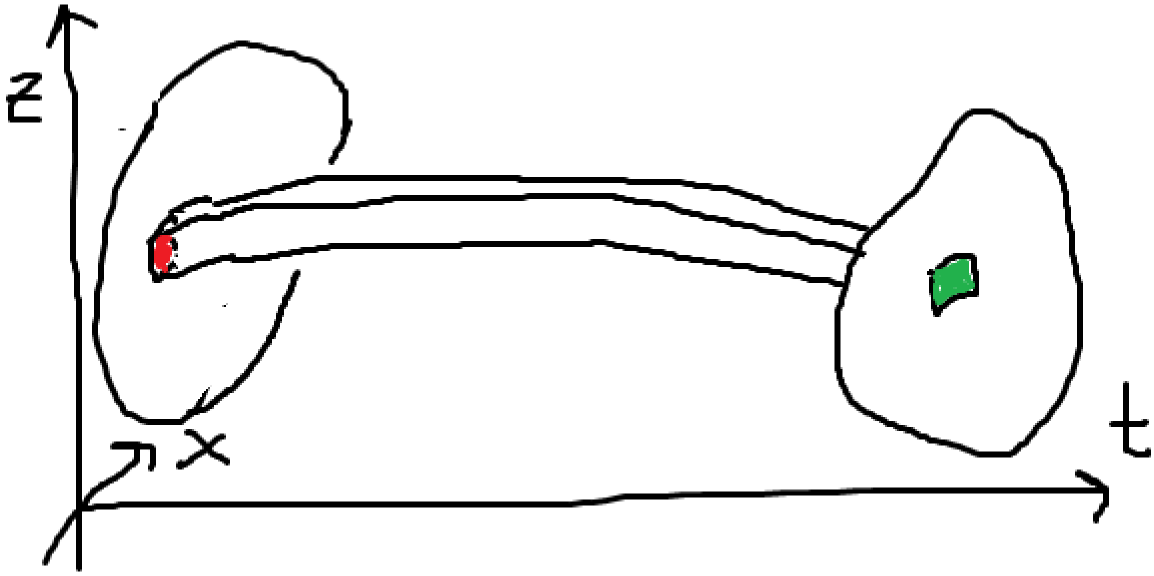
Рис. 7.1. Траектории камня: а) с минимальным действием; б) слишком большое T; в) слишком маленькое U

физической траектории $z^{\text{физ}}(t)$ этот интеграл принимает минимальное значение. Это проиллюстрировано на рис. 7.1. Чтобы достичь минимального значения действия (7.1), камню хотелось бы увеличить свою потенциальную энергию и забраться как можно выше. Но поскольку у него назначено свидание — в фиксированный момент времени t_1 он должен оказаться в точке z_1, — он не может забираться слишком высоко. Тогда он пролетел бы большое расстояние, для чего он должен был бы лететь с большой скоростью, а тогда интеграл действия (7.1) получил бы большой положительный вклад от члена с кинетической энергией.

Истинная траектория, кривая а) на рис. 7.1, — это результат переговорного компромисса между T и U.

С тем замечанием, что L является функцией не траектории, а то, что я называю «отчёт» - закон движения, т.е. не только траектории, но и знанием, в какое время частица была в каждой точке. Без этой информации мы не можем вычислять производные по времени. Или, если уж так хочется оставить термин «траектория», то можно заменить его на «мировая линия в простанстве-времени».

Так вот, здесь действие суммируется от каждого кусочка пространства-времени:



На рисунке у меня нет оси y (и поэтому не элемент объёма, а элемент площади), но, думаю, понятно.
Тогда действие от каждого кусочка.

$$d^3S = \int_{t_0}^{t_1} d^3L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(U(\bar{z}) - \rho(\bar{z}) \frac{\dot{\bar{z}}^2}{2} \right) dt$$

А чтобы найти действие от всей капли, надо проинтегрировать по всем её кусочкам:

$$S = \iiint_{R^3} d^3S = \iiint_{R^3} \int_{t_0}^{t_1} \left(U(\bar{z}) - \rho(\bar{z}) \frac{\dot{\bar{z}}^2}{2} \right) dt\, dV$$

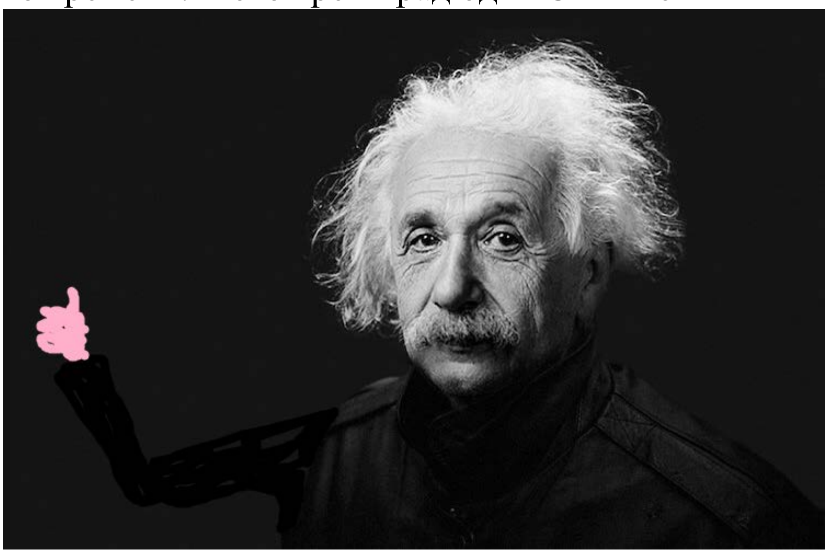
Естественно обозначить величину под интегралом как плотность функции Лагранжа

$$\Lambda(\bar{z}, \dot{\bar{z}}, t) = U(\bar{z}) - \rho(\bar{z}) \frac{\dot{\bar{z}}^2}{2}$$

Видим, что название «плотность ф-ции Ланграажа» полностью оправдано: это функция Лагранжа от кусочка объёмом d^3V, делённая на этот сам объём d^3V. Тогда действие от всей капли можно записать как

$$S = \iiint_{R^3} \int_{t_0}^{t_1} \Lambda[\text{отчёт}]\, dt\, dV$$

Заметим, что интеграл по времени заменился на четверной интеграл: по объёму и по времени. В это время рад один Эйнштейн



Потому что это хорошо вписывается в СТО – там время и пространство должны всегда ходить вместе.

Итак, капля движется так, чтобы это самое действие S минимизировать. А вот как нам его минимизировать?
Давайте обсудим, в каком виде мы хотим получить ответ, переведя «узнать всё о движении капли» на язык математики.
Когда у нас была одна точечная частица, нашей целью был закон движения частицы **r**(t).
Для системы с бесконечным числом степеней свободы, т.е. капли, мы хотим получить функцию **r**(**r**$_{нач}$,t) – тот же закон движения, но с дополнительным аргументом – начальным положением кусочка капли.

Если вы откроете любое пособие, учебник по КлаТП (да хоть Степаньянца), то вы там не встретите **r**(**r**$_{нач}$,t), зато встретите **φ**(**r**, t) с пометой «да это поле».
По сути это одно и то же: векторная функция четырёх переменных (трёх координат и времени).
Отметим, что Смилга в своей книжке не помечает **φ**(**r**, t) жирным цветом, хотя он это делает для всех векторов! Поле – это вектор. Пока 3-вектор.

Итак, в любом пособии вы встретите формулу:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right) = 0$$

Это аналог уравнения Эйлера-Лагранжа для случая конечных степеней свободы.
Давайте с ней разбираться.
Во-первых, готическая L – это то, что у меня Λ – плотность функции Лагранжа.
Во-вторых, составители всяких теорфизных учебников – невероятно ленивые задницы. Им невероятно лень написать знак суммирования. А нам лень, напишем его. Мы уважаем читателя.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} = \sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right)$$

Если расписать, получим

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi_i} = \left(\frac{\partial\dot{\Lambda}}{\partial\dot{\varphi}_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right)}\right)$$

В-третьих, что за индекс i у поля? А оно же векторное. Вместо i может быть x, может быть y, можем быть z.
С помощью того же уравнения можно решать задачи о распространении звуковых волн. И электромагнитных тоже. Тогда у нас будет 4-вектор {φ, A}, где i может быть уже и 0 в том числе.

Памяти Ньютонова формализма
Как мы знаем, Ньютон построил свой механику и вообще он был красавчик. Сколько олимпиадок мы выиграли с его вторым законом – эх были времена.

Потом в 4-м семе грянул лагранжев формализм с «сейчас мы будем решать баянные задачи, но новым для нас способом».

Но как только мы дошли до систем с бесконечным числом степеней, тут Ньютонов формализм неприменим вовсе. Ну а как вы собираете считать силу, действующую на кусочек капли где-нибудь внутри? Вы будете писать двензор давлений? Ну, удачи ☺
Сила – вещь векторная и с этой точки зрения очень противная.
ОК, желание решать задачи школьными методами так просто не отпадает. Вы скажите «ещё есть энергетический способ». Вообще энергетический способ приведёт нас, вероятно, к гамильтоновому формализму. Наверное, с его помощью тоже можно решить каплю. Просто исторически так никто не делал.

Баланс энергии и импульса
Становятся для нас совершенно очевидными – это просто ЗСЭ и ЗСИ в элементе объёма d^3V в любой момент времени. А ещё лучше (в 4-обозначениях, не зря мы прошли СТО!) – закон сохранения 4-импульса в элементе объёма пространства-времени d^4V.

А что же такое классическая теория поля?
Далее есть два пути развития мысли.
Или мы продолжаем исследовать механические системы – дорешиваем задачу о жидкой капле, решаем другие подобные задачи – это на мехмате.
А можно, как на Физтехе, применить полученные навыки к электромагнетизму. Как правило, подобное (лагранжиан э/м поля и далее) и называют классической теорией поля. Какой смысл в этом, если Максвелл уже написал свои уравнения без всяких лагранжианов?
По большому счёту да, у классической теории поля огромные проблемы с применимостью – практической пользы от неё ноль. Ну, теоретикам она по кайфу. Поэтому на ФФ она лишь спецкурс на теоркафедрах.